第 45 卷第 2 期 河 北 科 技 大 学 学 报 Vol. 45, No. 2
2024 年 4 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Apr. 2024

文章编号:1008-1542(2024)02-0176-05

套代数上的一类非线性中心化子

纪玉德[1],吴　冰[2],杨　翠[2]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;
2.河北工程技术学院工程管理学院,河北石家庄　050091)

摘　要:为了推广算子代数中的基本理论,对一类非线性映射成为套代数上的可加中心化子的条件进行了研究。首先,基于 Hilbert 空间上的非平凡套定义与该套有关的套代数,并定义套代数上的一个非线性映射;其次,采用矩阵分块方法获得关于此映射的几个性质;最后,证明套代数上满足某种条件的非线性映射为可加中心化子,给出刻画该映射的具体形式。结果表明,套代数上满足某种条件的非线性映射为可加中心化子,且可完全刻画。研究结果推广了非线性映射成为套代数上可加中心化子的结论,丰富了算子代数拓扑结构的分类问题,为套代数上其他类型非线性映射问题的刻画提供了借鉴与参考。

关键词:算子代数;中心化子;非线性映射;Hilbert 空间;矩阵分块

中图分类号:O151.23　　**文献标识码**:A　　**DOI**:10.7535/hbkd.2024yx02008

A class of nonlinear centralizers on nest algebras

JI Yude[1], WU Bing[2], YANG Cui[2]

(1. School of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China;
2. School of Engineering Management, Hebei Polytechnic Institute, Shijiazhuang, Hebei 050091, China)

Abstract: In order to extend the basic theory of operator algebras, the conditions for a class of nonlinear mappings to become additive centralizers on nest algebras were studied. Firstly, the nest algebras related to a non-trivial nest based on a Hilbert space was defined, and a nonlinear mapping on the nest algebra was defined. Secondly, several properties about this mapping were obtained by using the matrix partitioning method. Finally, it was proved that a nonlinear mapping on the nest algebra that satisfies certain conditions was an additive centralizer, and a specific form for characterizing this mapping was provided. The results show that the nonlinear mapping satisfying some conditions on nested algebras is additive centralizer and can be characterized completely. The research results promote the conclusion that nonlinear mappings become additive centralizers on nested algebras, enrich the classification problem of topological structure for operator algebras, and provide reference and guidance for characterizing other types of nonlinear mappings on nested algebras.

Keywords: operator algebras; centralizer; nonlinear mapping; Hilbert space; matrix partitioning

收稿日期:2023-08-21;修回日期:2024-03-02;责任编辑:张士莹
基金项目:国家自然科学基金(61972093);河北省自然科学基金(F2022208007);河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2022136)
第一作者简介:纪玉德(1979—),男,内蒙古赤峰人,副教授,博士研究生,主要从事微分方程边值问题方面的研究。
通信作者:吴冰,副教授。E-mail:wubing2018@126.com

纪玉德,吴冰,杨翠.套代数上的一类非线性中心化子[J].河北科技大学学报,2024,45(2):176-180.
JI Yude, WU Bing, YANG Cui. A class of nonlinear centralizers on nest algebras[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2024, 45(2):176-180.

设 ψ 是环或代数 M 上的一个自映射。若 $\forall A, B \in M$，有 $\psi(AB)=\psi(A)B$ 或 $\psi(AB)=A\psi(B)$，则称 ψ 是 M 上的左中心化子或右中心化子。如果 ψ 既是左中心化子又是右中心化子，则称 ψ 是中心化子。作为环或代数上一类重要的变换，关于具有满足哪些条件的映射为中心化子的研究一直受到许多学者的关注[1-13]，但大多要求映射具有可加性或线性性。例如：文献[1]证明了 2-无扰自由半素环 M 上满足 $2\psi(A^2)=\psi(A)A+A\psi(A)(\forall A\in M)$ 的可加映射 ψ 是中心化子；文献[2]证明了 J-子空间格代数中全体有限秩算子构成的代数 $F(L)$ 上满足 $\psi(P)=\psi(P)P=P\psi(P)$ 的线性映射 ψ 是中心化子；文献[3]刻画了完全分配可交换子空间格代数 $\mathrm{Alg}\,L$ 上满足条件 $\psi(A^{m+n+1})-A^m\psi(A)A^n\in FI(\forall A\in \mathrm{Alg}\,L)$ 的可加映射 ψ 的具体形式，即存在 $\mathrm{Alg}\,L$ 中心里的元素 λ，使得 $\psi(A)=\lambda A$；文献[4]研究了完全分配可交换子空间格代数上的广义 Jordan 中心化映射。事实上，自然界和工程技术中出现的大量问题都是非线性的，因此对各种非线性问题的研究成为热点问题[14-21]。本文将考虑套代数上满足某种条件的非线性映射，证明此映射为可加中心化子，并给出完全刻画。

1　预备知识

定义 1　设 H 为实或复数域 F 上的 Hilbert 空间，$B(H)$ 表示 H 上的全体有界线性算子构成的代数。如果 N 是 $B(H)$ 中的一个包含零算子 I 和单位算子 I 的全序投影族，且在强算子拓扑下是闭的，则称 N 是一个套。与套 N 相对应的套代数记为 $\mathrm{Alg}\,N$，并定义为 $\mathrm{Alg}\,N=\{T\in B(H): TX\subseteq X, \forall X\in N\}$。

如果套 N 至少含有一个非平凡投影，则称套 N 是非平凡的；否则，称套 N 是一个平凡套。显然，平凡套 N 对应的套代数 $\mathrm{Alg}\,N$ 即为 $B(H)$。

本文假设套 N 是非平凡的，并取 $P_1\in N$ 为一个固定非平凡投影，记 $P_2=I-P_1$ 且 $M_{ij}=(P_i)\mathrm{Alg}(NP_j)$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2)$，则 $\mathrm{Alg}\,N=M_{11}\oplus M_{12}\oplus M_{22}$，其中 $\oplus$ 表示直和。

2　主要结果

定理 1　设 H 为实或复数域 F 上的 Hilbert 空间，N 为 H 上的非平凡套，$\mathrm{Alg}\,N$ 是与套 N 有关的套代数，并且 $\psi: \mathrm{Alg}\,N\to \mathrm{Alg}\,N$ 是一个映射（无可加或线性假设）。如果存在满足 $(m+n)(m-n)\neq 0$ 的非零整数 m, n，使得

$$2m\psi(AB)+2n\psi(BA)=m\psi(A)B+mA\psi(B)+n\psi(B)A+nB\psi(A) \tag{1}$$

对所有的 $A, B\in \mathrm{Alg}\,N$ 成立，则存在 $\lambda\in F$，使得对所有的 $A\in \mathrm{Alg}\,N$，有 $\psi(A)=\lambda A$。

引理 1　设 $A_{ij}\in M_{ij}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2)$，则

1）若 $A_{11}M_{12}=0$，则 $A_{11}=0$；

2）若 $M_{12}A_{22}=0$，则 $A_{22}=0$；

3）若 $M_{11}A_{12}=0$，则 $A_{12}=0$；

4）若 $A_{12}M_{22}=0$，则 $A_{12}=0$。

引理 2　$\psi(0)=0$。

证明：由式(1)得，$2m\psi(0)+2n\psi(0)=m\psi(0)0+m0\psi(0)+n\psi(0)0+n0\psi(0)$，故 $2(m+n)\psi(0)=0$，从而 $\psi(0)=0$。证毕。

引理 3　$\psi(M_{ij})\subseteq M_{ij}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2)$。

证明：由式(1)得，$2m\psi(P_1)+2n\psi(P_1)=m\psi(P_1)P_1+mP_1\psi(P_1)+n\psi(P_1)P_1+nP_1\psi(P_1)$，化简得

$$2\psi(P_1)=\psi(P_1)P_1+P_1\psi(P_1)。\tag{2}$$

对式(2)等号两边同时乘 P_2，得 $P_2\psi(P_1)P_2=0$。对式(2)等号左边乘 P_1 右边乘 P_2，得 $P_1\psi(P_1)P_2=0$。所以 $\psi(P_1)\in M_{11}$。类似可以证明 $\psi(P_2)\in M_{22}$。

对任意的 $A_{11}\in M_{11}$，由于 $A_{11}P_2=P_2A_{11}=0$，从而由式(1)及引理 2，有

$$0=2m\psi(A_{11}P_2)+2n\psi(P_2A_{11})=m\psi(A_{11})P_2+mA_{11}\psi(P_2)+n\psi(P_2)A_{11}+nP_2\psi(A_{11}),$$

化简得

$$m\psi(A_{11})P_2+nP_2\psi(A_{11})=0。\tag{3}$$

对式(3)等号两边同时乘 P_2，得 $P_2\psi(A_{11})P_2=0$。对式(3)等号左边乘 P_1 右边乘 P_2，得 $P_1\psi(A_{11})P_2=0$。

从而 $\psi(A_{11})\in M_{11}$。类似可以证明 $\psi(A_{22})\in M_{22}$。

对任意的 $A_{12}\in M_{12}$，由于 $A_{12}P_1=0$，从而由式(1)及引理2，有

$$\begin{aligned}2n\psi(A_{12})=&2m\psi(A_{12}P_1)+2n\psi(P_1A_{12})=\\&m\psi(A_{12})P_1+mA_{12}\psi(P_1)+n\psi(P_1)A_{12}+nP_1\psi(A_{12})=\\&m\psi(A_{12})P_1+n\psi(P_1)A_{12}+nP_1\psi(A_{12})。\end{aligned}\tag{4}$$

对式(4)等号两边同时乘 P_1，得 $2nP_1\psi(A_{12})P_1=(m+n)P_1\psi(A_{12})P_1$，即 $(m-n)P_1\psi(A_{12})P_1=0$，从而 $P_1\psi(A_{12})P_1=0$。对式(4)等号两边同时乘 P_2，得 $P_2\psi(A_{12})P_2=0$，从而 $\psi(A_{12})\in M_{12}$。

引理4 设 $A_{ij},B_{ij}\in M_{ij}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2)$，则

1) $\psi(A_{11}A_{12})=\psi(A_{11})A_{12}=A_{11}\psi(A_{12})$；

2) $\psi(A_{12}A_{22})=\psi(A_{12})A_{22}=A_{12}\psi(A_{22})$；

3) $\psi(A_{11}B_{11})=\psi(A_{11})B_{11}=A_{11}\psi(B_{11})$；

4) $\psi(A_{22}B_{22})=\psi(A_{22})B_{22}=A_{22}\psi(B_{22})$。

证明：由式(1)、引理2和引理3可知，

$$\begin{aligned}2m\psi(A_{11}A_{12})=&2m\psi(A_{11}A_{12})+2n\psi(A_{12}A_{11})=\\&m\psi(A_{11})A_{12}+mA_{11}\psi(A_{12})+n\psi(A_{12})A_{11}+nA_{12}\psi(A_{11})=\\&m\psi(A_{11})A_{12}+mA_{11}\psi(A_{12}),\end{aligned}$$

从而

$$2\psi(A_{11}A_{12})=\psi(A_{11})A_{12}+A_{11}\psi(A_{12})。\tag{5}$$

在式(5)中取 $A_{11}=P_1$，并注意到 $P_1\psi(A_{12})=\psi(A_{12})$，故 $\psi(A_{12})=\psi(P_1)A_{12}$。

同理得 $2\psi(A_{12}A_{22})=\psi(A_{12})A_{22}+A_{12}\psi(A_{22})$，进而 $\psi(A_{12})=A_{12}\psi(P_2)$，则 $\psi(A_{11}A_{12})=A_{11}A_{12}\psi(P_2)=A_{11}\psi(A_{12})$，再由式(5)，有 $\psi(A_{11}A_{12})=\psi(A_{11})A_{12}$。

类似可以证明 $\psi(A_{12}A_{22})=\psi(P_1)A_{12}A_{22}=\psi(A_{12})A_{22}$，$\psi(A_{12}A_{22})=A_{12}\psi(A_{22})$。

由引理4的(1)，对任意的 $A_{12}\in M_{12}$，有 $\psi(A_{11}B_{11})A_{12}=\psi(A_{11}B_{11}A_{12})=\psi(A_{11})B_{11}A_{12}$，

且

$$\psi(A_{11}B_{11})A_{12}=\psi(A_{11}B_{11}A_{12})=A_{11}\psi(B_{11}A_{12})=A_{11}\psi(B_{11})A_{12},$$

从而

$$(\psi(A_{11}B_{11})-\psi(A_{11})B_{11})A_{12}=0,\quad(\psi(A_{11}B_{11})-A_{11}\psi(B_{11}))A_{12}=0。$$

由引理1的(1)和引理3，可得 $\psi(A_{11}B_{11})=\psi(A_{11})B_{11}=A_{11}\psi(B_{11})$。

类似可以证明 $\psi(A_{22}B_{22})=\psi(A_{22})B_{22}=A_{22}\psi(B_{22})$。证毕。

引理5 设 $A_{ij}\in M_{ij}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2)$，则

1) $\psi(A_{11}+A_{12})=\psi(A_{11})+\psi(A_{12})$；

2) $\psi(A_{12}+A_{22})=\psi(A_{12})+\psi(A_{22})$。

证明：由式(1)、引理2和引理4，可得

$$\begin{aligned}&2m\psi(A_{11}+A_{12})+2n\psi(A_{11})=\\&2m\psi(P_1(A_{11}+A_{12}))+2n\psi((A_{11}+A_{12})P_1)=\\&m\psi(P_1)(A_{11}+A_{12})+mP_1\psi(A_{11}+A_{12})+n\psi(A_{11}+A_{12})P_1+n(A_{11}+A_{12})\psi(P_1)=\\&(m+n)\psi(A_{11})+m\psi(A_{12})+mP_1\psi(A_{11}+A_{12})+n\psi(A_{11}+A_{12})P_1,\end{aligned}$$

即

$$2m\psi(A_{11}+A_{12})=(m-n)\psi(A_{11})+m\psi(A_{12})+mP_1\psi(A_{11}+A_{12})+n\psi(A_{11}+A_{12})P_1。\tag{6}$$

对式(6)等号两边同时乘 P_2，得 $P_2\psi(A_{11}+A_{12})P_2=0$。对式(6)等号左边乘 P_1 右边乘 P_2，得

$$2mP_1\psi(A_{11}+A_{12})P_2=m\psi(A_{12})+mP_1\psi(A_{11}+A_{12})P_2,$$

从而 $P_1\psi(A_{11}+A_{12})P_2=\psi(A_{12})$。

对式(6)等号两边同时乘 P_1，得 $2mP_1\psi(A_{11}+A_{12})P_1=(m-n)\psi(A_{11})+(m+n)P_1\psi(A_{11}+A_{12})P_1$。移项，有 $(m-n)P_1\psi(A_{11}+A_{12})P_1=(m-n)\psi(A_{11})$，从而 $P_1\psi(A_{11}+A_{12})P_1=\psi(A_{11})$。所以 $\psi(A_{11}+A_{12})=\psi(A_{11})+\psi(A_{12})$。

类似可以证明 $\psi(A_{12}+A_{22})=\psi(A_{12})+\psi(A_{22})$。证毕。

引理 6　设 $A_{ij}, B_{ij} \in M_{ij}(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2)$，则

1) $\psi(A_{12}+B_{12})=\psi(A_{12})+\psi(B_{12})$；

2) $\psi(A_{11}+B_{11})=\psi(A_{11})+\psi(B_{11})$；

3) $\psi(A_{22}+B_{22})=\psi(A_{22})+\psi(B_{22})$。

证明：对任意的 $A_{12}, B_{12} \in M_{12}$，因为 $A_{12}+B_{12}=(P_1+A_{12})(P_2+B_{12})$ 且 $(P_2+B_{12})(P_1+A_{12})=0$，由式(1)、引理 2—引理 5，有

$$\begin{aligned}2m\psi(A_{12}+B_{12})&=2m\psi((P_1+A_{12})(P_2+B_{12}))+2n\psi((P_2+B_{12})(P_1+A_{12}))=\\&m\psi(P_1+A_{12})(P_2+B_{12})+m(P_1+A_{12})\psi(P_2+B_{12})+n\psi(P_2+B_{12})(P_1+A_{12})+\\&n(P_2+B_{12})\psi(P_1+A_{12})=2m\psi(B_{12})+2m\psi(A_{12})。\end{aligned}$$

故 $\psi(A_{12}+B_{12})=\psi(A_{12})+\psi(B_{12})$。

对任意的 $A_{11}, B_{11} \in M_{11}$，一方面，由引理 4，有 $\psi((A_{11}+B_{11})A_{12})=\psi(A_{11}+B_{11})A_{12}$；另一方面，由引理 4 和引理 6 的 1)，有 $\psi((A_{11}+B_{11})A_{12})=\psi(A_{11}A_{12})+\psi(B_{11}A_{12})=\psi(A_{11})A_{12}+\psi(B_{11})A_{12}$。

比较以上 2 个式子，可得 $(\psi(A_{11}+B_{11})-\psi(A_{11})-\psi(B_{11}))A_{12}=0$。

由引理 1 中的 1)，得 $\psi(A_{11}+B_{11})=\psi(A_{11})+\psi(B_{11})$。

类似可以证明 $\psi(A_{22}+B_{22})=\psi(A_{22})+\psi(B_{22})$。证毕。

引理 7　设 $A_{ij} \in M_{ij}(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2)$，则

$$\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})=\psi(A_{11})+\psi(A_{12})+\psi(A_{22})。$$

证明：由式(1)及引理 4 可知，

$$\begin{aligned}2(m+n)\psi(A_{22})+2n\psi(A_{12})=&\\&2m\psi(P_2(A_{11}+A_{12}+A_{22}))+2n\psi((A_{11}+A_{12}+A_{22})P_2)=\\&m\psi(P_2)(A_{11}+A_{12}+A_{22})+mP_2\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})+\\&n\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})P_2+n(A_{11}+A_{12}+A_{22})\psi(P_2)=\\&(m+n)\psi(A_{22})+n\psi(A_{12})+mP_2\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})+n\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})P_2,\end{aligned}$$

从而

$$(m+n)\psi(A_{22})+n\psi(A_{12})=mP_2\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})+n\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})P_2。\tag{7}$$

对式(7)等号左边乘 P_1 右边乘 P_2，得 $\psi(A_{12})=P_1\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})P_2$。对式(7)等号两边同时乘 P_2，得 $\psi(A_{22})=P_2\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})P_2$。类似可以证明 $\psi(A_{11})=P_1\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})P_1$，从而 $\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})=\psi(A_{11})+\psi(A_{12})+\psi(A_{22})$。证毕。

注 1　引理 1—引理 7 给出了定义在套代数上的映射(无可加或线性假设)在满足式(1)下的相关性质，为定理 1 证明其成为可加中心化子提供了理论基础。

定理 1 的证明：　设 $A, B \in \mathrm{Alg}\,N$，则 $A=A_{11}\oplus A_{12}\oplus A_{22}$，$B=B_{11}\oplus B_{12}\oplus B_{22}$，其中 $A_{ij}, B_{ij} \in M_{ij}(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2)$。由引理 6 和引理 7，有

$$\begin{aligned}\psi(A+B)=&\psi(A_{11}+B_{11})+\psi(A_{12}+B_{12})+\psi(A_{22}+B_{22})=\\&\psi(A_{11})+\psi(B_{11})+\psi(A_{12})+\psi(B_{12})+\psi(A_{22})+\psi(B_{22})=\\&\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})+\psi(B_{11}+B_{12}+B_{22})=\\&\psi(A)+\psi(B),\end{aligned}$$

故 ψ 具有可加性。又由引理 3 和引理 4 可知，

$$\begin{aligned}\psi(AB)=&\psi(A_{11}B_{11}+A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{22}B_{22})=\\&\psi(A_{11}B_{11})+\psi(A_{11}B_{12})+\psi(A_{12}B_{22})+\psi(A_{22}B_{22})=\\&\psi(A_{11})B_{11}+\psi(A_{11})B_{12}+\psi(A_{12})B_{22}+\psi(A_{22})B_{22}=\\&A_{11}\psi(B_{11})+A_{11}\psi(B_{12})+A_{12}\psi(B_{22})+A_{22}\psi(B_{22})=\\&\psi(A_{11}+A_{12}+A_{22})(B_{11}+B_{12}+B_{22})=\\&(A_{11}+A_{12}+A_{22})\psi(B_{11}+B_{12}+B_{22})=\\&\psi(A)B=A\psi(B)。\end{aligned}$$

这说明 ψ 是套代数 $\mathrm{Alg}\,N$ 上的一个中心化子。进而对任意的 $A \in \mathrm{Alg}\,N$，有 $\psi(A)=\psi(I)A=A\psi(I)$。而套代数的一次换位是恒等算子的常数倍，则存在 $\lambda \in F$，使得 $\psi(I)=\lambda I$，从而对任意的 $A \in \mathrm{Alg}\,N$，有

$\psi(A)=\lambda A$。证毕。

3 结 语

本文运用矩阵分块方法研究了套代数上的一类非线性映射，通过几个引理给出了此映射的性质，获得了其成为可加中心化子的条件，并得到具体形式。该结果可为将来中心化子的研究提供依据与参考。

但是本文是在非线性映射满足特定条件下考虑的可加中心化子问题，限制条件较强。在今后的研究中，将会探索削弱非线性映射所满足的条件，进一步研究此类问题的更一般化结果。

参考文献/References：

[1] VUKMAN J. An identity related to centralizers in semiprime rings[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae，1999，40(3)：447-456.

[2] WEI Qiong，LI Pengtong. Centralizers of J-subspace lattice algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications，2007，426(1)：228-237.

[3] 马飞，张建华，任刚练. 完全分配可交换子空间格代数上的中心化映射[J]. 吉林大学学报(理学版)，2017，55(1)：48-54.
MA Fei，ZHANG Jianhua，REN Ganglian. Centralizer mappings on completely distributive commutative subspace lattice algebras[J]. Journal of Jilin University(Science Edition)，2017，55(1)：48-54.

[4] VUKMAN J，KOSI-ULBL I. On centralizers of semiprime rings[J]. Aequationes Mathematicae，2003，66(3)：277-283.

[5] QI Xiaofei，HOU Jinchuan. Characterizing centralizers and generalized derivations on triangular algebras by acting on zero product[J]. Acta Mathematica Sinica English Series，2013，29(7)：1245-1256.

[6] VUKMAN J，KOSI-ULBL I. Centralizers on rings and algebras[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，2005，71(2)：225-234.

[7] KOSI-ULBL I，VUKMAN J. On centralizers of standard operator algebras and semisimple H^*-algebras[J]. Acta Mathematica Hungarica，2006，110(3)：217-223.

[8] KOSI-ULBL I，VUKMAN J. On$(m，n)$-Jordan centralizers of semiprime rings[J]. Publicationes Mathematicae-Debrecen，2003，66(3)：277-283.

[9] 齐霄霏. 环与算子代数上中心化子的刻画[J]. 数学学报，2013，56(4)：459-468.
QI Xiaofei. Characterization of centralizers on rings and operator algebras[J]. Acta Mathematica Sinica，2013，56(4)：459-468.

[10] 杨翠，张建华. 套代数上的广义 Jordan 中心化子[J]. 数学学报，2010，53(5)：975-980.
YANG Cui，ZHANG Jianhua. Generalized Jordan centralizers on nest algebras[J]. Acta Mathematica Sinica，2010，53(5)：975-980.

[11] 许文思，安润玲. 三角代数上的中心化子[J]. 太原理工大学学报，2016，47(6)：814-817.
XU Wensi，AN Runling. Centralizers on triangular algebras[J]. Journal of Taiyuan University of Technology，2016，47(6)：814-817.

[12] 李倩，李鹏同. 完全分配 CSL 代数上的中心化子[J]. 数学年刊 A 辑，2011，32(3)：375-384.
LI Qian，LI Pengtong. Centralizers of completely distributive CSL algebras[J]. Chinese Annals of Mathematics，Series A，2011，32(3)：375-384.

[13] 张海芳，费秀海. 套代数上的$(m，n)$-导子[J]. 计算机工程与应用，2016，52(7)：13-16.
ZHANG Haifang，FEI Xiuhai. On$(m，n)$-derivation on nest algebras[J]. Computer Engineering and Applications，2016，52(7)：13-16.

[14] FU Wenlian，XIAO Zhankui，DU Xiankun. Nonlinear jordan higher derivations of triangular algebras[J]. Communications in Mathematical Research，2015，31(2)：119-130.

[15] 郭春静，孟凡猛，陈坤，等. 具有 Hilfer 分数阶脉冲微分方程边值问题解的存在性[J]. 河北科技大学学报，2023，44(2)：132-143.
GUO Chunjing，MENG Fanmeng，CHEN Kun，et al. Existence of solutions for boundary value problems of fractional impulsive differential equations with Hilfer[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2023，44(2)：132-143.

[16] 魏文英，纪玉德，郭彦平. 非线性二阶差分方程三点边值问题的研究[J]. 河北科技大学学报，2021，42(4)：360-368.
WEI Wenying，JI Yude，GUO Yanping. Research of the three-point boundary value problems for nonlinear second-order difference equation[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2021，42(4)：360-368.

[17] FEI Xiuhai，ZHANG Jianhua. Nonlinear generalized Lie derivations on triangular algebras[J]. Linear and Multilinear Algebra，2017，65(6)：1158-1170.

[18] 江卫华，韩晴晴，杨君霞. 具有变号非线性项的分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 河北科技大学学报，2019，40(4)：294-300.
JIANG Weihua，HAN Qingqing，YANG Junxia. Existence of positive solutions for boundary value problems of fractional differential equations with sign-changing nonlinear term[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2019，40(4)：294-300.

[19] 郝剑伟，黄永艳. 带有 Hatree 和对数非线性项的 Schrödinger 方程非平凡解的存在性[J]. 河北科技大学学报，2019，40(6)：482-487.
HAO Jianwei，HUANG Yongyan. Existence of nontrivial solution for schrödinger equations with Hatree and logarithmic nonlinearities[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2019，40(6)：482-487.

[20] LING Zhengchu，LU Fangyan. Jordan maps of nest algebras[J]. Linear Algebra and Its Applications，2004，387：361-368.

[21] DAVIDSON K R. Nest Algebras[M]. Waterloo：Longman Scientific and Technical Publishing Company，1988.